ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 9 - Widmo operatora na przestrzeni Hilberta

1. Wyznaczyć widmo punktowe operatorów przesunięcia $T, S : \ell^2 \to \ell^2$, gdzie
$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ S(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (x_2, x_3, x_4, \ldots). \end{aligned}$$
Obliczyć normy tych operatorów. Pokazać także, że $T = S^*$ z definicji oparatora sprzężonego do danego operatora.

2. Pokazać, że widmo operatora przesunięcia S z poprzedniego zadania to zbiór
$$\sigma(S) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$$

3. Korzystając z faktu, że jeżeli $\lambda \in \sigma(T)$, to $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$, pokazać, że
$$\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \le 1\}$$

4. Pokazać, że operator liniowy $T \in B(H)$ (zwany *operatorem położenia*), gdzie $H = L^2[0, 1]$ nad ciałem $\mathbb{R}$, zadany wzorem
$$(T(f))(x) = xf(x)$$
nie posiada wartości własnych i jego widmem jest $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, 1]$.

R. Lenczewski